PROBABILIDADE

DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

A Teoria da Probabilidade tenta dar significado a experimentos tais que o resultado não pode ser completamente pré-determinado, ou seja, visa definir um modelo matemático que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

***Fenômenos ou experimentos aleatórios*:** São aqueles em que o processo de experimentação está sujeito a incertezas, logo, não é possível controlar as circunstâncias relevantes, então não é possível prever com exatidão o resultado das manifestações individuais.

- Características de um experimento aleatório:

a) Cada experimento poderá ser repetido um grande número de vezes sob as mesmas condições;

b) Não podemos afirmar que resultado em particular ocorrerá, porém, podemos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento - as possibilidades de resultado.

c) Quando o experimento é repetido um grande número de vezes, surgirá uma regularidade nos resultados. Esta regularidade, chamada de regularidade estatística, é que torna possível construir um modelo matemático preciso com o qual se analisará o experimento.

Exemplo1: Vai chover no litoral no fim de semana?
{ Chove, Não chove }
Probabilidade de chover = ?
Usar a intuição ➔ Subjetivo
Usar a freqüência relativa dos últimos dez fins de semana em que choveu ➔ Objetivo

Calcular a probabilidade é medir a incerteza ou associar um grau de confiança aos resultados possíveis. Por exemplo, escolha uma carta qualquer em um baralho comum depois de ter sido bem embaralhado (isto é, ao acaso). O que é mais provável, sair uma figura (R, D, J) ou sair o dois de copas?

Essas medidas, as probabilidades, associam às possíveis combinações dos resultados, que chamamos de *eventos*, um valor entre 0 e 1. Quanto maior o valor, maior a certeza de sua possibilidade de ocorrência.

***Espaço amostral* (Ω ou S)**: Refere-se ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório

Eventos: Qualquer subconjunto de um espaço amostral.

Por exemplo, sair uma face par no lançamento de um dado, ou uma carta de copas em um baralho, são eventos, isto é, subconjuntos do **conjunto que contém todos os resultados possíveis do experimento aleatório**.
Exemplo1: Ω_1 = {Chove, Não chove}
Em geral, temos interesse em eventos particulares do experimento.

Exemplo1 ➔ Evento A: Chove

$A = \{Chove\} \subset \Omega_1$

Exercícios: Descreva o espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos a seguir:

a) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num período de 1 hora
b) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem
c) Lançar uma moeda três vezes, sucessivamente, e anotar a seqüência de caras e coroas

Os conjuntos Ω e $\varnothing$ também são eventos:

➔ Ω é o evento certo

➔ $\varnothing$ é o evento impossível

• OPERAÇÕES COM EVENTOS

Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral:

➔ $A \cap B$ é o evento em que A e B ocorrem simultaneamente

➔ $A \cup B$ é o evento em que A ocorre ou B ocorre (ou ambos)

➔ A^c é o evento em que A não ocorre

Exemplo2: Lançamento de um dado.

Conjunto de possibilidades: $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento B: Sair face par ➔ $B = \{2, 4, 6\} \subset \Omega_2$
Evento C: Sair uma face ímpar ➔ $C = \{1, 3, 5\} \subset \Omega_2$
Evento D: Sair uma face maior que 3 ➔ $D = \{4, 5, 6\} \subset \Omega_2$
Evento E : Sair face 1 ➔ $E = \{1\} \subset \Omega_2$
$B \cap D$ = sair uma face par e maior que 3 ➔ $\{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\} \subset \Omega_2$
$B \cap C$ = sair uma face par e ímpar ➔ $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \varnothing$ (B e C são disjuntos)
$C = B^c$; $B = C^c$
$B \cup D$ = sair uma face par ou maior que 3 ➔ $\{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\} \subset \Omega_2$
$B \cup C$ = sair uma face par ou ímpar ➔ $\{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega_2$

• Se dois eventos quaisquer têm intersecção vazia, isto é, eles não podem ocorrer simultaneamente, dizemos que eles são **mutuamente exclusivos**.

Existem várias maneiras de definir a probabilidade de um evento. A mais adotada nos primeiros cursos é aquela baseada em espaços amostrais equiprováveis. Qual a chance de ocorrer cara ao lançar uma moeda?

Em um experimento, dizemos que cada ponto amostral é igualmente provável de ocorrer sempre que nenhum ponto amostral particular possa ocorrer mais ou menos que qualquer outro. Assim, um espaço amostral equiprovável é aquele em que todos os seus elementos são igualmente possíveis.

a) DEFINIÇÃO CLÁSSICA

Dado um experimento aleatório com Ω equiprovável, define-se um evento $A \subset \Omega$, tal que P(A) representa o quociente entre n(A): nº. de elementos em A e n(Ω): nº. de elementos em Ω:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$, isto é, a razão entre os casos favoráveis do evento e o total de casos possíveis

- Limitações:
  - Dificuldade em enumerar n(A) e n(Ω) em casos de caracter qualitativo.;
  - n(Ω) infinito;
  - Modelo adequado a uma classe de fenômenos

Exemplo3: Duas cartas são retiradas ao acaso de um baralho comum de 52 cartas. Qual a probabilidade de que ambas sejam de copas ?
Evento A = ambas copas

$$P(A) = \frac{\text{número de maneiras onde 2 cartas selecionadas podem ser de copas}}{\text{número de maneiras nas quais 2 cartas podem ser selecionadas}} = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{78}{1326}$$

* Em geral utiliza-se os métodos de enumeração: Combinação, arranjos e permutações.

Exercícios:

a) Três garotos e 3 garotas sentam-se em fila. Encontre a probabilidade das 3 garotas sentarem juntas.
b) Suponha que um lote de 550 maçãs há 2% bichadas. Qual a probabilidade que numa amostra aleatória de 25 maçãs (sem reposição) contenha 2 maçãs bichadas ?

b) DEFINIÇÃO FREQÜENTISTA OU EMPÍRICA

Dado um experimento e um evento A podemos atribuir um número a A representado por P(A) e chamado de probabilidade de ocorrência de A, de tal modo que ao se repetir o experimento, sob as mesmas condições, um grande número de vezes, a freqüência relativa de ocorrência de A é aproximadamente igual a P(A).

Exemplo4: Suponha que vamos jogar uma moeda *n* vezes (n=20) e seja A o evento *sair cara*. Vamos chamar de n_A o número de vezes que a face cara ocorrer e f_A a freqüência relativa do evento A nas n repetições do experimento.

$$f_n(A) = \frac{\#\text{ de repetições que A ocorre}}{n}$$

c) MÉTODO SUBJETIVO

É uma avaliação pessoal do grau de viabilidade de um evento.

d) DEFINIÇÃO MATEMÁTICA OU AXIOMÁTICA

Uma probabilidade P é uma aplicação do conjunto das partes de Ω no intervalo fechado [0,1], isto é, P: $P(\Omega) \rightarrow [0,1]$. Portanto é uma função de conjunto que associa a cada $A \subseteq \Omega$, um número P(A), real, e que deve satisfazer às seguintes propriedades:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$
b) $P(\Omega) = 1$
c) Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
d) Se $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ... = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ocorre o mesmo imediatamente para qualquer "n" finito: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

TEOREMAS:

1. Se A é um evento impossível, então $A=\emptyset \Rightarrow P(A) = P(\emptyset) = 0$

2. Se $\overline{A}$ é o evento complementar de A, então $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

3. Sejam A e B dois eventos quaisquer, então:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então :
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

5. Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$

Exemplo5: Um lote é formado por 10 peças boas, 4 com defeitos e 2 com defeitos graves. Uma peça é escolhida ao acaso. Calcule a probabilidade de que:

a) Ela não tenha defeitos graves:
Seja DG: quantidade de peças com defeitos graves no lote e $\#(\Omega)=16$, então

$$P(\overline{DG}) = 1 - P(DG) = 1 - 2/16 = 14/16 = 0{,}875$$

b) Ela não tenha defeitos:
Seja B: quantidade de peças boas no lote e $\#(\Omega)=16$, então

$$P(B) = \frac{10}{16} = 0{,}625$$

c) Ela seja boa ou tenha defeitos graves:
$P(B \cup DG) = P(B) + P(DG) - P(B \cap DG) = 0{,}625 + 0{,}125 - 0 = 0{,}75$

Exercícios:

1. Um certo tipo de motor elétrico pode apresentar 3 tipos de falhas: A = mancais presos, B = queima de enrolamento e C = escovas gastas. Supondo que a probabilidade da ocorrência do evento A é três vezes a de B e a ocorrência de B é cinco vezes a do evento C, ache P(A), P(B) e P(C).

2. Um investidor tem como opção investir em três dentre cinco ações. Entretanto, apenas duas irão proporcionar lucro substancial nos cinco anos seguintes, mas o investidor desconhece quais. Considerando que esse investidor escolhe ao acaso as três ações em que investe, qual a probabilidade do mesmo escolher as duas ações mais lucrativas ?

Considere o Exemplo abaixo:

Dados do Censo Demográfico de 91 publicado pelo IBGE relativos aos habitantes de Sergipe, na faixa etária entre 20 a 24 anos com relação às variáveis Sexo e Leitura.

Sexo	Lê	Não lê	Total
Masculino	39.577	8.672	48.249
Feminino	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Um jovem entre 20 e 24 anos é escolhido ao acaso em Sergipe.

Ω = conjunto de 101.850 jovens de Sergipe, com idade entre 20 e 24 anos.

Eventos de interesse:

M = jovem sorteado é do sexo masculino
F = jovem sorteado é do sexo feminino
L = jovem sorteado sabe ler
M ∩ L= jovem sorteado é do sexo masculino e sabe ler
M ∪ L= jovem sorteado é do sexo masculino ou sabe ler

Podemos obter algumas probabilidades:

$$P(L) = \frac{\text{nº de jovens que sabem ler de } \Omega}{\text{nº de jovens de } \Omega} = \frac{85.881}{101.850} = 0{,}843$$

$$P(M) = \frac{\text{nº de jovens do sexo masculino de } \Omega}{\text{nº de jovens de } \Omega} = \frac{48.245}{101.850} = 0{,}473$$

$F = M^c \Rightarrow P(F) = P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}473 = 0{,}527$

$$P(M \cap L) = \frac{n^o \text{ de jovens do sexo masculino e que sabem ler de } \Omega}{n^o \text{ total de jovens } (\Omega)} = \frac{39.557}{101.850} = 0{,}388$$

$$P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L) = 0{,}473 + 0{,}843 - 0{,}388 = 0{,}928$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

No exemplo anterior, se soubermos que o jovem sorteado é do sexo masculino, qual é a probabilidade de que saiba ler? Temos uma ***informação parcial***: o jovem é do sexo masculino.

Vamos designar a probabilidade de L quando se sabe que o jovem é do sexo masculino por P (L | M) e denominá-la probabilidade (condicional) de L dado M.

É natural atribuirmos:

$$P\,(L\mid M)=\frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens que sabem ler dentre aqueles do sexo masculino}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de jovens do sexo masculino}}=\frac{39.577}{48.249}=0{,}820$$

Note que:

$$P\,(L\mid M)=\frac{\dfrac{\text{n}^{\text{o}}\text{ jovens do sexo masculino e que sabem ler}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de jovens}}}{\dfrac{\text{n}^{\text{o}}\text{ jovens do sexo masculino}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de jovens}}}$$

$$P\,(L\mid M)=\frac{P\,(M\cap L)}{P\,(M)}\qquad (*)$$

Sejam A e B eventos de um experimento aleatório qualquer, imitando (*), podemos dizer que a probabilidade condicional de A dado B (denotada por P (A / B)) é definida como:

$$P\left(A\mid B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Por exemplo, a probabilidade de ser do sexo masculino dado que lê é dada por:

$$P\,(M\mid L)=\frac{P\,(M\cap L)}{P\,(L)}=\frac{0{,}388}{0{,}843}=0{,}460$$

Exercícios:

a) Dois dígitos são selecionados ao acaso de 1 a 9, sem reposição. Se a soma é par, encontre a probabilidade de ambos serem ímpares ?

b) Um homem tem em sua mão 5 cartas vermelhas de um baralho comum de 52 cartas. Qual é a probabilidade de elas serem todas do mesmo naipe, isto é, copas ou ouros ?

REGRA OU TEOREMA DO PRODUTO

Como conseqüência da definição de probabilidade condicional, podemos calcular a probabilidade da ocorrência conjunta de dois eventos A e B.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A) \bullet P(A)$$

Exemplo:
Uma urna contém fichas numeradas de 1 a 4. Retira-se uma ficha da urna ao acaso e anota-se o número. Esta ficha então é recolocada na urna, as fichas são numeradas e retira-se novamente uma ficha, ao acaso, da urna. Qual a probabilidade de ter saído a ficha com número 1, na primeira retirada, e de ser 5 a soma dos números das duas fichas retiradas?

Pelo teorema do produto:

Evento A = {sair o número 1 na primeira retirada} ➔ P(A) = $1/4$

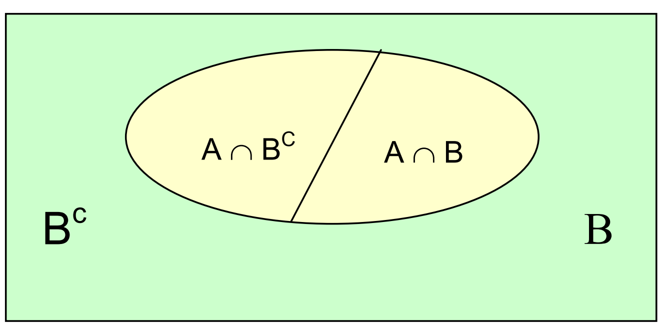
Evento B = {soma = 5 | a primeira ficha é 1} , se queremos que a soma seja 5, então é preciso que a segunda ficha seja o número 4 ➔ P(B|A) = $1/4$

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \bullet P(A) = 1/4 \bullet 1/4 = 1/16$$

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Sejam A e B dois eventos.

Há duas maneiras de A ocorrer: ou A e B ocorrem ($A \cap B$) ou A e B^c ocorrem ($A \cap B^c$). Deste modo, $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, onde $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são conjuntos disjuntos.



Pela regra da soma $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

Pela regra do produto $P(A) = P(B) . P(A \mid B) + P(B^c)\, P(A \mid B^c)$ (regra da probabilidade total)

Se a seqüência (finita ou enumerável) de eventos aleatórios A_1 , A_2 , ..., A_n formar uma partição completa de Ω, então:

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)$$

Uma interessante analogia com o teorema da probabilidade total se obtém em Química: Suponha que temos n frascos contendo diferentes soluções de um mesmo sal, totalizando digamos 1 litro. Seja P(Ai) a probabilidade de termos o volume Ai no i-ésimo frasco, i=1,2,...,n. Se reunirmos todas as soluções em um só frasco e se P(B) representar a concentração da solução resultante teremos:

$P(B) = P(B|A_1)\ P(A_1) + P(B|\ A_2)\ P(A_2) + ...+ P(B|\ A_n)\ P(A_n)$

Neste caso $P(B/\ A_i)$ indica a probabilidade de concentração do sal no i-ésimo frasco.

Usando este teorema, podemos calcular a probabilidade de A_i dada a ocorrência de B:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_i \setminus B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

Esta é a fórmula de **Bayes**. Ela é útil quando conhecemos as probabilidades dos A_i e as probabilidades condicionais de B dado A_i, mas não conhecemos diretamente a probabilidade de B.

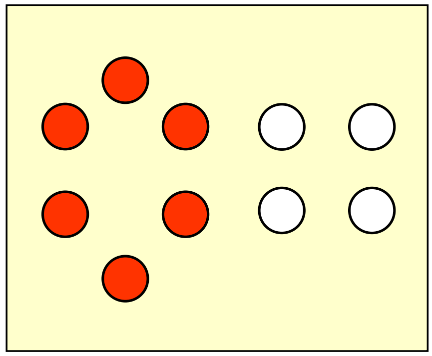
Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25, 35 e 40% do total produzido, respectivamente. Da produção de cada máquina 5, 4 e 2%, respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso:
a) Qual a probabilidade dele ser defeituoso?
b) Verifica-se que ele é defeituoso. Qual a probabilidade de que o parafuso venha da máquina A?

a) P(A) = 0,25 probabilidade da máquina A produzir um parafuso.
P(B) = 0,35 e P(C) = 0,4
P(D | A) = 0,05 , P(D | B) = 0,04 e P(D | C) = 0,02

b) $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(A)\ P(D \mid A) + P(B)\ P(D \mid B) + P(C)\ P(D \mid C)$
$= 0,25 * 0,05 + 0,35 * 0,04 + 0,4 * 0,02 = 0,0345$

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A).P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{0,25 * 0,05}{0,0345} = 0,3623$$

Exemplo 2
Em uma urna, há 10 bolas: 4 brancas e 6 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, SEM reposição. Qual é a probabilidade da 2ª bola ser vermelha?

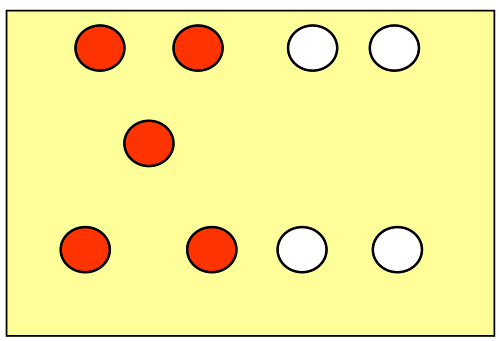


Se A é a probabilidade da 2ª bola sorteada ser vermelha, queremos calcular P(A).
Seja B a probabilidade da 1ª bola sorteada ser vermelha.

$$P\,(B) = \frac{6}{10}$$

$$\begin{aligned} P(B^C) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - \frac{6}{10} \\ &= \frac{4}{10} \end{aligned}$$

Se B ocorreu, isto é, saiu vermelha na primeira retirada, então



$$P(A \mid B) = P\,(\text{sortear 1 bola vermelha dentre 5 vermelhas e 4 brancas})$$

$$P(A \mid B) = \frac{5}{9}$$

$P\,(A \mid B^c) = P$ (sortear 1 bola vermelha dentre 6 vermelhas e 3 brancas) = 6/10

Portanto:

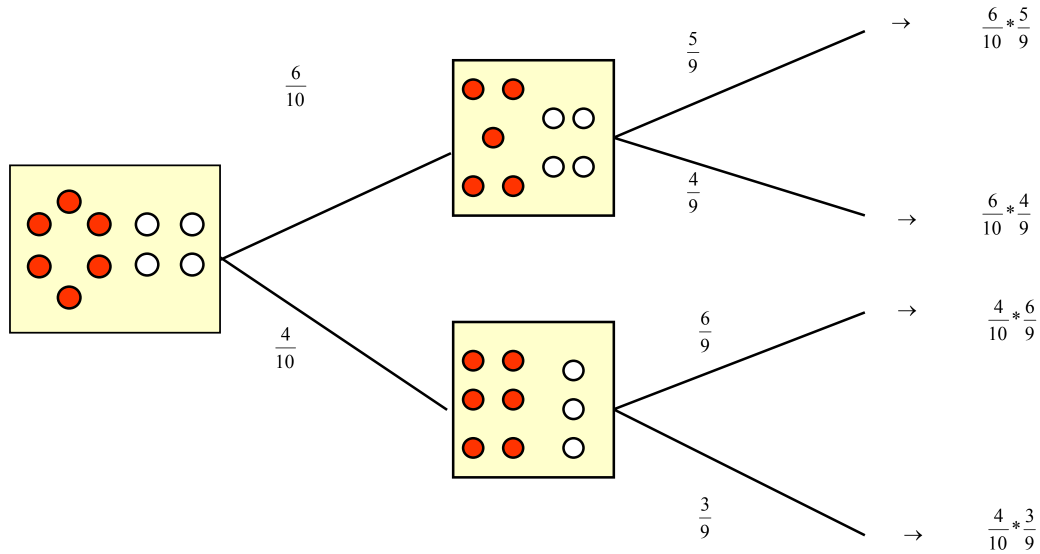
$$P(A) = P(B)\,.\,P(A \mid B) + P(B^C)\,P(A \mid B^C)$$

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10}$$

$$P(A) = \frac{6}{10}\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\right)$$

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

Podemos fazer o diagrama em árvore ou árvore de probabilidades da situação descrita neste exercício.



$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{6}{10}$$

Exercícios:

a) Um carro pode parar por defeito elétrico ou mecânico. Se há defeito elétrico o carro para na proporção 1 para 6 e se é mecânico na proporção de 1 para 21. Em 27% das viagens há defeito elétrico e em 15% mecânico, não ocorrendo mais de um defeito na mesma viagem, igual ou de tipo diferente. Se o carro para, qual é a probabilidade de ser por defeito elétrico ?

b) A caixa A contém nove cartas numeradas de 1 a 9 e a caixa B contém cinco numeradas de 1 a 5. Uma caixa é selecionado ao acaso e uma carta é retirada. Se o número é par, encontre a probabilidade da carta ter vindo da caixa A.

INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA

Dados $A, B \subseteq \Omega$, A e B são ditos independentes, se e somente se :

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

Generalizando:

Se $\{A_i\}$, i= 1, 2, 3, ..., n é uma família finita de eventos, eles são ditos independentes se e somente se :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Observar que:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(B \mid A) \bullet P(A) \\ P(A \cap B) = P(A \mid B) \bullet P(B) \end{cases}$$ para eventos quaisquer (condicional)

$$\{P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$ para eventos independentes

- Para que três eventos sejam independentes é necessário verificar quatro igualdades:

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \,.\, P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \,.\, P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$

que corresponde à $\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$, igualdades a serem verificadas

- Para quatro eventos é necessário verificar onze igualdades que são:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

- Para “n” eventos é necessário verificar:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$ igualdades

Como conseqüência, têm-se que $\varnothing$ e Ω são independentes de A, $\forall A \subseteq \Omega$, ou seja:

1) $P(\varnothing \cap A) = P(\varnothing) = 0$
2) $P(\Omega \cap A) = P(A)$

Se A e B são independentes, então:

a) $P(A|B) = P(A)$, com $P(B) > 0$
b) $P(B|A) = P(B)$, com $P(A) > 0$

Exemplo: A probabilidade de que A resolva um problema é de 2/3 e a probabilidade de que B resolva é de 3/4. Se ambos tentarem independentemente, qual a probabilidade do problema ser resolvido?

E = resolver um problema
Ω = { Resolve, Não resolve }
A = {A Resolve }
B = {B Resolve }
$A \cap B$= {A e B Resolvem}

Como são eventos independentes:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B) = 2/3 + 3/4 – (2/3) * (3/4) = 2/3 + 3/4 – 2/4 = 0{,}917$

Exercícios:
a) Uma máquina consiste de 4 componentes ligados em paralelo de tal forma que a máquina falha apenas quando todos os componentes falharem. Supondo que as falhas são independentes entre si e se cada componente tem respectivamente as probabilidade 0.1 0.2 0.3 e 0.4 de falhar quando a máquina é ligada, qual é a probabilidade da máquina não falhar ?

b) A probabilidade de um homem viver, mais dez anos é ¼ e a probabilidade de sua esposa viver mais dez anos é 1/3. Encontre a probabilidade de ambos estarem vivos dentro de dez anos e de ao menos um estar vivo dentro de dez anos.